Devoir maison n° 5 : Correction

Exercice 1. (*D'après E3A PC 2020*)

Soient x un réel positif ou nul et φ_x la fonction qui à un réel $t \in \mathbb{R}_+$, associe $\varphi_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt}$.

On pose alors, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi_x(t)\,\mathrm{d}t$.

Q1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.

Idée : *La valeur $f(x)$ est bien définie si l'intégrale la définissant est convergente.*

La fonction φ_x est continue sur $[0\,;+\infty[$ comme quotient de fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.

De plus, pour tout $x \geqslant 0$ et tout $t \geqslant 0$, $|f(t)| = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. Or $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est intégrable en $+\infty$ (fonction de référence) donc pas comparaison $\boxed{\varphi_x \text{ est intégrable sur } [0\,;+\infty[}$.

Remarque : on aurait aussi pu montrer que $\varphi_x(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$.

Ainsi $\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}_+}$.

Q2. Calculer $f(0)$.

D'abord, d'après la question précédent, on peut calculer $f(0)$ car l'intégrale correspondante est convergente.

On a directement $f(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+0}\,\mathrm{d}t = \Big[-\mathrm{e}^{-t}\Big]_0^{+\infty} = 0-(-1) = \boxed{1}$.

Q3. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$. On pourra comparer $f(x)$ et $f(y)$ pour deux éléments x et y de $\mathbb{R}_+$ tels que $x < y$.

Idée : *Comme le suggère l'indication, on revient ici à la définition de la (dé)croissance d'une fonction. En particulier, il n'est pas toujours nécessaire de dériver une fonction pour obtenir ses variations.*

Soient $0 \leqslant x < y$. Pour tout $t \geqslant 0$, on a

$$\begin{array}{rcl}
x < y & & \\
& \Big\downarrow & \times t \geqslant 0 \\
xt < yt & & \\
& \Big\downarrow & +1 \textit{ puis passage à l'inverse} \\
\dfrac{1}{1+xt} > \dfrac{1}{1+yt} & & \\
& \Big\downarrow & \times\,\mathrm{e}^{-t} \geqslant 0 \\
\varphi_x(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+xt} > \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{1+yt} = \varphi_y(t) & & \\
& \Big\downarrow & \textit{Croissance de l'intégrale} \\
f(x) > f(y) & &
\end{array}$$

Autrement dit, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est (strictement) décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.

Q4. Démontrer que la suite $\big(f(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ dont on donnera la valeur.

Idée : *Théorème de convergence dominée sur* $]0\,;+\infty[$.

- Soit $t > 0$. On a $1+nt \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\varphi_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Autrement dit la suite de fonctions $\big(\varphi_n\big)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers la fonction nulle, qui est continue (par morceaux) sur $]0\,;+\infty[$.
- *Hypothèse de domination* : Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme dans **Q1**, pour tout $t > 0$, on a $|\varphi_n(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}$ est indépendante de n et intégrable sur $]0\,;+\infty[$ (fonction de référence).

D'après le $\boxed{\text{théorème de convergence dominée}}$, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \overset{\text{TCD}}{=} \int_0^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t = \boxed{0}.$$

Exercice 2. Un peu de calcul

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 10 & 0 & -6 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Q5. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\det(x\mathrm{I}_3 - M)$ sous **forme factorisée**.
Pour cela, on commencera le calcul par l'opération $\mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. D'abord on forme $x\mathrm{I}_3 - M = \begin{pmatrix} x-5 & -1 & 2 \\ -10 & x & 6 \\ -5 & 2 & x-1 \end{pmatrix}$ (*en faisant attention aux signes*). On procède alors au calcul du déterminant en commençant par l'opération proposée par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
\det(x\mathrm{I}_3 - M) &= \begin{vmatrix} x-5 & -1 & 2 \\ -10 & x & 6 \\ -5 & 2 & x-1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} x-4 & -1 & 2 \\ x-4 & x & 6 \\ x-4 & 2 & x-1 \end{vmatrix} && \mathrm{C}_1 \leftarrow \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & x & 6 \\ 1 & 2 & x-1 \end{vmatrix} && \textit{linéarité } \mathrm{C}_1 \\
&= (x-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & x+1 & 4 \\ 0 & 3 & x-3 \end{vmatrix} && \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \textit{ et } \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \\
&= (x-4) \times 1 \times \begin{vmatrix} x+1 & 4 \\ 3 & x-3 \end{vmatrix} && \textit{dvp. } \mathrm{C}_1 \\
&= (x-4)\big[(x+1)(x-3) - 3 \times 4\big] \\
&= (x-4)(x^2 - 2x - 15) \\
&= \boxed{(x-4)(x-5)(x+3)}. && \Delta = 64, \textit{ racines } 5 \textit{ et } -3
\end{aligned}$$

Q6. Résoudre l'équation $MX = -3X$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Notons $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ une solution de $MX = -3X$. Cela équivaut à

$$\begin{cases} 5x + \ \ y - 2z = -3x \\ 10x \qquad - 6z = -3y \\ 5x - 2y + 1z = -3z \end{cases} \iff \begin{cases} 8x + \ \ y - 2z = 0 \\ 10x + 3y - 6z = 0 \\ 5x - 2y + 4z = 0 \end{cases} \underset{\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 + 2\mathrm{L}_1}{\overset{\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_1}{\iff}} \begin{cases} 8x + y - 2z = 0 \\ -6x = 0 \\ 21x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}.$$

Ainsi les solutions de $MX = -3X$ sont les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, *i.e.* l'ensemble $\boxed{\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

Exercice 3. Autour des matrices semblables

Q7. Soit $S_\lambda = \lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (on dit que S_λ est une matrice *scalaire*).
Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblables à S_λ.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semblable à S_λ. Soit $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telle que $M = PS_\lambda P^{-1}$. On a alors $M = P\lambda \mathrm{I}_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda \mathrm{I}_n = S_\lambda$. Ainsi $\boxed{\text{la seule matrice semblable à } S_\lambda \text{ est elle-même}}$.

Soient maintenant A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui sont **semblables**.

Q8. *Question de cours* : (re)démontrer que $\det(A) = \det(B)$, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Soit $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

- Pour le déterminant et la trace, on utilise leurs propriétés usuelles.

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(PAP^{-1}) \\ &\overset{\text{multiplicativité det}}{=} \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(A)\frac{1}{\det(P)} \\ &= \det(A). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(B) &= \mathrm{tr}(PAP^{-1}) \\ &\overset{\mathrm{tr}(MN)=\mathrm{tr}(NM)}{=} \mathrm{tr}(P^{-1}PA) \\ &= \mathrm{tr}(\mathrm{I}_n A) \\ &= \mathrm{tr}(A) \end{aligned}$$

- Pour le rang, on utilise une propriété vue en première année : le rang d'une application linéaire n'est pas modifié par composition par un isomorphisme[1]. Matriciellement cela signifie que le rang n'est pas modifié par multiplication par une matrice inversible. En particulier

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \mathrm{rg}(PAP^{-1}) \\ &\overset{P \text{ est inversible}}{=} \mathrm{rg}(AP^{-1}) \\ &\overset{P^{-1} \text{ aussi}}{=} \mathrm{rg}(A). \end{aligned}$$

Q9. Grâce à la question **Q7**, donner deux matrices de taille 3 qui ont même déterminant, même trace, même rang, et qui pourtant ne sont pas semblables.

D'après **Q7**, il suffit de choisir une matrice qui a même déterminant, même trace et même rang qu'une matrice scalaire mais qui n'est pas scalaire. Par exemple $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ conviennent : elles ont pour déterminant 1 (elles sont triangulaires donc leur déterminant est le produit de leurs coefficients diagonaux), pour trace 3 et pour rang 3 (elles sont déjà sous forme échelonnée) et pourtant d'après **Q7**, C n'est pas semblable à la matrice scalaire I_3 (car $C \neq \mathrm{I}_3$).

Q10. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k et B^k sont semblables.

Notons de nouveau $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$. Montrons par récurrence sur k que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$: « $B^k = PA^kP^{-1}$ ».

Initialisation : D'une part $B^0 = \mathrm{I}_n$ et d'autre part $PA^0P^{-1} = P\mathrm{I}_nP^{-1} = PP^{-1} = \mathrm{I}_n$, *i.e.* $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $B^k = PA^kP^{-1}$.

$$\begin{aligned} B^{k+1} &= B \times B^k \\ &\overset{\mathcal{P}(k)}{=} PAP^{-1} \times PA^kP^{-1} \\ &\overset{P^{-1}P = \mathrm{I}_n}{=} PA\mathrm{I}_nA^kP^{-1} \\ &= PA^{k+1}P^{-1}, \end{aligned}$$

1. Plus généralement on a le résultat suivant : soient E, F et G trois espaces vectoriels, $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ deux applications linéaires de rangs finis. Alors $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$.

i.e. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = PA^kP^{-1}$, *i.e.* $\boxed{B^k \text{ et } A^k \text{ sont semblables}}$.

Q11. En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, $Q(A)$ et $Q(B)$ sont semblables.

Comme précédemment, soit $P \in \mathrm{GL_n}(\mathbb{R})$ telle que $B = PAP^{-1}$.
Soit également $Q \in \mathbb{R}[X]$. On écrit $Q = a_0 + a_1X + \cdots + a_dX^d$ avec $d \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$. Alors

$$\begin{aligned}
PQ(A)P^{-1} &= P\big(a_0\mathrm{I}_n + a_1A + \cdots + a_dA^d\big)P^{-1} && \textit{distributivité à gauche}\\
&= \big(a_0P + a_1PA + \cdots + a_dPA^d\big)P^{-1} && \textit{distributivité à droite}\\
&= a_0PP^{-1} + a_1PAP^{-1} + \cdots + a_dPA^dP^{-1} && PP^{-1} = \mathrm{I}_n \textit{ et } \textbf{\textit{Q10}}\\
&= a_0\mathrm{I}_n + a_1B + \cdots + a_dB^d\\
&= Q(B).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{Q(A) \text{ et } Q(B) \text{ sont semblables}}$.

Q12. *Application* : Montrer que parmi les trois matrices

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il n'y en a pas deux semblables.

D'abord, notons que $\mathrm{tr}(M_1) = 2$ alors que $\mathrm{tr}(M_2) = \mathrm{tr}(M_3) = 3$. Par conséquent, d'après le deuxième point de **Q8**, $\boxed{M_1 \text{ ne peut être semblable à aucune des deux autres}}$.
Ensuite, remarquons que $\mathrm{rg}(M_2 - \mathrm{I}_3) = 2$ alors que $\mathrm{rg}(M_3 - \mathrm{I}_3) = 3$. Or, d'après la question précédente, si M_2 et M_3 étaient semblables, il en serait de même pour $Q(M_2)$ et $Q(M_3)$ où $Q(X) = X - 1$, ce qui n'est manifestement pas le cas (d'après **Q8**, deux matrices semblables ont même rang). Par conséquent, $\boxed{M_2 \text{ et } M_3 \text{ ne sont pas semblables}}$.